SEANCE TD : THEOREME DE THALES

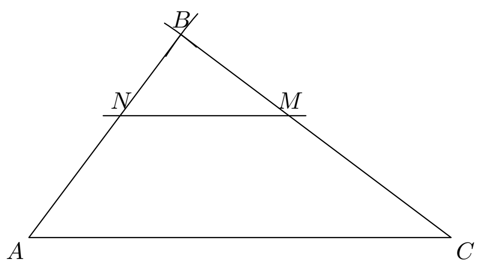
Correction 1

1. Le triangle ABC est rectangle en B.
D'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité suivante :
$AC^2 = AB^2 + BC^2$
Par application numérique, on a :
$$5{,}2^2 = 4{,}8^2 + BC^2$$
$$27{,}04 = 23{,}04 + BC^2$$
$$BC^2 = 27{,}04 - 23{,}04$$
$$BC^2 = 4$$
$$BC = 2$$

2. (a.) Les points A, C, N sont alignés.
Les points A, B, M sont alignés.
Les droites (BC) et (MN) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité suivante :
$$\frac{AC}{AN} = \frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MN}$$
Utilisons l'égalité suivante :
$$\frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$$
Par application numérique, on a :
$$\frac{5{,}2}{AN} = \frac{2}{3}$$
$$AN \times 2 = 5{,}2 \times 3$$
$$AN = \frac{15{,}6}{2}$$
$$AN = 7{,}8$$
(b.) De l'égalité des trois quotients obtenue à la question précédente, utilisons l'égalité suivante :
$$\frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MN}$$
Par application numérique, on a :
$$\frac{4{,}8}{AM} = \frac{2}{3}$$
A l'aide du produit en croix, on écrit :
$$2 \times AM = 4{,}8 \times 3$$
$$AM = \frac{14{,}4}{2}$$
$$AM = 7{,}2$$

Correction 2

1. Voici la figure à l'échelle ½ :



2. Remarquons que :
- $AB^2 + CB^2 = 7{,}5^2 + 10^2 = 156{,}25$
- $AC^2 = 12{,}5^2 = 156{,}25$

On en déduit l'égalité : $AB^2 + CB^2 = AC^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est un triangle rectangle en B.

3. Les points B, N, A et les points B, M, C sont alignés.
Les droites (MN) et (AC) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité suivante :
$$\frac{BM}{BC} = \frac{BN}{BA} = \frac{MN}{AC}$$
$$\frac{4}{10} = \frac{BN}{7{,}5} = \frac{MN}{12{,}5}$$
De cette égalité, nous tirons les formules suivantes :
- $\frac{4}{10} = \frac{BN}{7{,}5}$ alors $BN = \frac{4}{10} \times 7{,}5 = 3\,cm$
- $\frac{4}{10} = \frac{MN}{12{,}5}$ Alors $MN = \frac{4}{10} \times 12{,}5 = 5\,cm$

Correction 3

1. Voici les deux chainons déductifs permettant de répondre à cette question :
- On remarque qu'on a :
  - $AB^2 = 15^2 = 225$
  - $AO^2 + OB^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$

  Donc, on a : $AB^2 = AO^2 + OB^2$
  Si un triangle vérifie l'égalité de Pythagore, alors ce triangle est rectangle.
  On en déduit que le triangle AOB est rectangle en O.
- $(CD) \perp (AO)$ et $(OB) \perp (AO)$.
  Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.
  Ainsi, on a : $(CD) /\!/ (OB)$.

2. Les points A, C, O et les points A, D, B sont alignés.
Les droites (CD) et (OB) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité des rapports suivante :
$$\frac{AC}{AO} = \frac{AD}{AB} = \frac{CD}{OB}$$
Utilisons l'égalité :
$$\frac{AC}{AO} = \frac{CD}{OB}$$
Par application numérique, on obtient :
$$\frac{3}{9} = \frac{CD}{12}$$
D'après le produit en croix, on a :
$$9 \times CD = 3 \times 12$$
$$CD = \frac{36}{9}$$
$$CD = 4\,cm$$

3. Ceci est faux car si on multiplie toutes les longueurs d'une figure par 3, son aire sera multiplié par 3^2.

Pour preuve, calculons l'aire de ces deux triangles rectangles :

- $\mathcal{A}_{ACD} = \dfrac{AC\times CD}{=}\dfrac{3\times 4}{2} = 6\,cm^2$
- $\mathcal{A}_{AOB} = \dfrac{AO\times OB}{2} = \dfrac{9\times 12}{2} = 54\,cm^2$

Correction 4

1. On a : $K\in[TM]$; $L\in[TN]$; $(KL)/\!/(MN)$

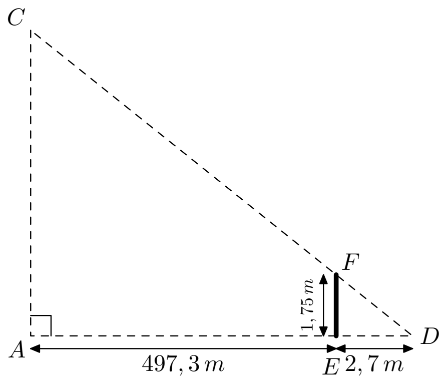
D'après le théorème de Thalès, on a :
$$\frac{TK}{TM} = \frac{TL}{TN} = \frac{KL}{MN}$$
Une application numérique nous donne :
$$\frac{5}{12{,}5} = \frac{6{,}5}{TN} = \frac{KL}{MN}$$
Le produit en croix nous donne :
$$5\times TN = 12{,}5\times 6{,}5$$
$$TN = \frac{12{,}5\times 6{,}5}{5} = 16{,}25\,cm$$

2. On a : $B\in[AC]$; $D\in[AE]$; $(BD)/\!/(CE)$

D'après le théorème de Thalès, on a :
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$$
Une application numérique nous donne :
$$\frac{AB}{AC} = \frac{4{,}2}{14} = \frac{BD}{12}$$
Le produit en croix nous donne :
$$4{,}2\times 12 = 14\times BD$$
$$BD = \frac{4{,}2\times 12}{14} = 3{,}6\,cm$$

Correction 5

Voici le dessin schématisé qui nous permettra d'utiliser plus facilement les théorèmes mathématiques adéquats :



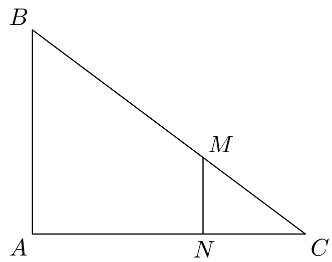
La personne se tenant droite et mesurant la distance du sommet de la tour Eiffel jusqu'à son centre, on en déduit que :

$(AC)/\!/(EF)$

On a : $E\in[DA]$; $F\in[DC]$; $(EF)/\!/(AC)$.
D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité des rapports suivants :
$$\frac{DE}{DA} = \frac{DF}{DC} = \frac{EF}{AC}$$
Par application numérique, on obtient :
$$\frac{DE}{DA} = \frac{FE}{AC}$$
$$\frac{2{,}7}{499{,}7} = \frac{1{,}75}{AC}$$
D'après le produit en croix, on obtient :
$$2{,}7\times AC = 1{,}75\times 499{,}7$$
$$AC = \frac{1{,}75\times 499{,}7}{2{,}7}$$
$$AC \approx 324\,m$$

Correction 6

On modélise la situation par la configuration suivante :



Notons :

- B le bord de la fenêtre ;
- A le pied du mur de la maison ;
- M le bord supérieur droit du mur de séparation ;
- N le bord inférieur droit du mur de séparation ;
- C le point du sol aligné avec les points B et M.

Plusieurs raisonnements sont nécessaires :

- Les deux murs (AB) et (MN) étant verticaux, on en déduit qu'ils sont perpendiculaires à la droite (AC).
  Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles. Les droites (AB) et (MN) sont parallèles entre elles.

  On a : $M\in[BC]$; $N\in[AC]$; $(MN)/\!/(AB)$
  D'après le théorème de Thalès, on a :
  $$\frac{CN}{CA} = \frac{CM}{CB} = \frac{MN}{AB}$$
  Avec les valeurs de l'énoncé, on a :
  $$\frac{CN}{CA} = \frac{CM}{CB} = \frac{4}{4{,}8}$$
  Notons x la longueur CN :
  $$\frac{x}{x+1{,}5} = \frac{CM}{CB} = \frac{4}{4{,}8}$$
  Utilisons l'égalité :
  $$\frac{x}{x+1{,}5} = \frac{4}{4{,}8}$$
  D'après le produit en croix, on a :

$$x \times 4{,}8 = (x+1{,}5)\times 4$$
$$4{,}8{\cdot}x = 4{\cdot}x + 6$$
$$4{,}8{\cdot}x - 4{\cdot}x = 6$$
$$0{,}8{\cdot}x = 6$$
$$x = \frac{6}{0{,}8} = 7{,}5$$

Ainsi : $CN = 7{,}5\,m$

- Le triangle CMN est un triangle rectangle en N. Si un triangle est rectangle alors il vérifie l'égalité de Pythagore.
  On a l'égalité :
  $$CM^2 = CN^2 + NM^2$$
  $$CM^2 = 7{,}5^2 + 4^2$$
  $$CM^2 = 56{,}25 + 16$$
  $$CM^2 = 72{,}25$$
  $$CM = \sqrt{72{,}25} = 8{,}5$$
- Reprenons l'égalité des quotients obtenue au premier point :
  $$\frac{CN}{CA} = \frac{CM}{CB} = \frac{MN}{AB}$$
  $$\frac{CN}{CA} = \frac{CM}{CB} = \frac{4}{4{,}8}$$
  On peut maintenant compléter :
  $$\frac{CN}{CA} = \frac{8{,}5}{CB} = \frac{4}{4{,}8}$$
  Utilisons l'égalité :
  $$\frac{8{,}5}{CB} = \frac{4}{4{,}8}$$
  D'après le produit en croix, on a :
  $$8{,}5 \times 4{,}8 = 4{\cdot}CB$$
  $$4{\cdot}CB = 40{,}8$$
  $$CB = \frac{40{,}8}{4}$$
  $$CB = 10{,}2\,m$$
  Ainsi, la longueur de l'échelle doit être au minimum de $10{,}2\,m$ pour atteindre le bord de la fenêtre : Roméo ne pourra visiter Juliette.

Correction 7

1. On a les longueurs suivantes obtenues grâce aux données de l'énoncé :
   - $CB = 0{,}2\,cm$: elle correspond à l'épaisseur du mur formant le puits ;
   - $FG = 0{,}95\,cm$: c'est le diamètre du puits et l'épaisseur du mur du puits ;
   - $RB = 0{,}8\,m$: c'est la différence entre la hauteur du regard et la hauteur du puits.
2. Les points R, C, F et R, B, G sont alignés.
   Le fond et le rebord étant horizontaux, on en déduit que les droites (BC) et (FG) sont parallèles.
   D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité des quotients suivants :
   $$\frac{RB}{RG} = \frac{RC}{RF} = \frac{BC}{FG}$$
   $$\frac{0{,}8}{RG} = \frac{RC}{RF} = \frac{0{,}2}{0{,}95}$$
   Utilisons l'égalité suivante :
   $$\frac{0{,}8}{RG} = \frac{0{,}2}{0{,}95}$$
   D'après le produit en croix, on a :
   $$0{,}8 \times 0{,}95 = RG \times 0{,}2$$
   $$RG = \frac{0{,}8 \times 0{,}95}{0{,}2}$$
   $$RG = 4 \times 0{,}95$$
   $$RG = 3{,}8\,m$$
   Le point B étant un point du segment $[RG]$, on a l'égalité :
   $$RG = RB + BG$$
   $$3{,}8 = 0{,}8 + BG$$
   $$BG = 3{,}8 - 0{,}8$$
   $$BG = 3\,m$$
   La profondeur du puits est de $3\,m$
3. Le puits étant de forme cylindrique de diamètre $75\,cm$ et la hauteur de l'eau étant de $2{,}60\,m$, son volume est de :
   $$\mathcal{V} = h \times \pi \times r^2 = 2{,}6 \times \pi \times 0{,}375^2 \approx 1{,}15\,m^3$$
   Le berger disposera de suffisamment d'eau.

