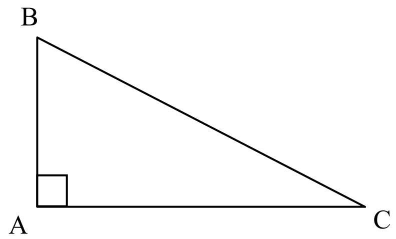
Le théorème de Pythagore

I Vocabulaire.

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit.

Exemple :



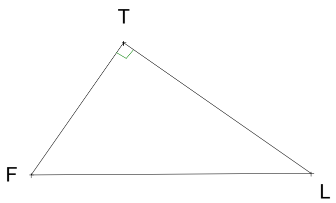
Dans le triangle ABC rectangle en A,
[BC] est l'hypoténuse,
[AC] et [AB] sont les côtés de l'angle droit.

II Enoncé du théorème.

Théorème : **Si** un triangle est rectangle, **alors** le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit.

autrement dit : **Si** le triangle ABC est rectangle en A, **alors on a l'égalité** $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Exemple :

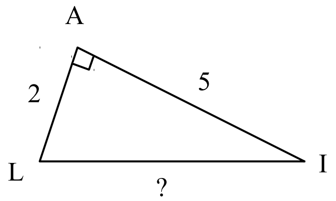


Dans le triangle FTL rectangle en T,
d'après l'égalité de Pythagore on a :
$FL^2 = FT^2 + TL^2$

III Exemples d'utilisation de l'énoncé de Pythagore.

Lorsque l'on connaît les longueurs de 2 côtés du triangle rectangle, le théorème de Pythagore permet de calculer la longueur du troisième côté.

1. Calcul de la longueur de l'hypoténuse.

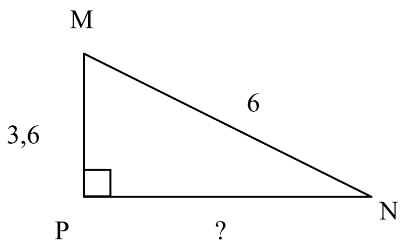


Dans le triangle ALI rectangle en A,

D'après Le théorème de Pythagore, on a : $IL^2 = AI^2 + AL^2$

Ainsi : $IL^2 = 5^2 + 2^2$
$IL^2 = 25 + 4$
$IL^2 = 29$
$IL = \sqrt{29}$ (Valeur exacte)
$IL \approx 5{,}4$ cm. (Valeur approchée qui ne peut pas être réinvestie)

2. Calcul de la longueur d'un côté de l'angle droit.



Dans le triangle MNP est rectangle en P,

D'après le théorème de Pythagore, on a : $MN^2 = MP^2 + PN^2$

$6^2 = 3{,}6^2 + PN^2$ (On isole toujours l'hypoténuse)
$36 = 12{,}96 + PN^2$

Ainsi : $PN^2 = 36 - 12{,}96$
$PN^2 = 23{,}04$
$PN = \sqrt{23{,}04}$ (Valeur exacte)
$PN = 4{,}8$ cm. (Valeur exacte qui peut être utilisée)

IV Petit point sur les racines carrées.

En découvrant l'égalité de Pythagore, nous avons eu besoin d'un nouvel outil : la racine carrée.

Nous allons dans ce paragraphe, mettre en place une définition précise de cet outil.

1. Définition

Définition :

Si a est un nombre positif alors il est le carré de deux nombres opposés l'un de l'autre.

Celui des deux qui est positif s'appelle « racine carrée de a » et se note $\sqrt{a}$, l'autre est $-\sqrt{a}$.

Exemple : 16 est le carré de 4 et de -4 . Ainsi $\sqrt{16}=4$.

Remarques : 1) $\sqrt{a}$ n'existe que si a est positif.
2) Une racine carrée est obligatoirement un nombre positif.

2. Quelques carrés « parfaits » à connaître

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

On en déduit, par exemple, que $\sqrt{25}=5$, $\sqrt{49}=7$ ou $\sqrt{144}=12$.

Par contre si on ne travaille pas avec un carré parfait (c'est à dire le carré d'un nombre entier), par exemple 72, on peut :

- en donner un encadrement : 64 < 72 < 81

Carré
« parfait » de 8

Carré
« parfait » de 9

Donc $8<\sqrt{72}<9$

- en donner une valeur avec la calculatrice : $\sqrt{72}\approx 8,49$

V Savoir si un rectangle est rectangle ou non.

Théorème : Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors ce triangle est rectangle.

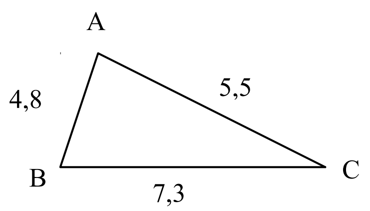
Autrement dit : Si dans un triangle ABC, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle est rectangle.

Méthode :

On donne les longueurs des 3 côtés d'un triangle ABC. Le triangle est-il rectangle ?

1) On repère le côté le plus long et on calcule le carré de sa longueur.
2) On calcule la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.
3) S'il y a égalité, la réciproque permet d'affirmer que le triangle est rectangle.
   S'il n'y a pas égalité, la contraposée permet d'affirmer que le triangle n'est pas rectangle.

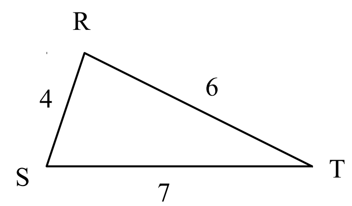
Exemples rédigés :



Dans le triangle ABC, [BC] est le plus grand côté.

$BC^2 = 7{,}3^2 = 53{,}29$.
$AB^2 + AC^2 = 4{,}8^2+5{,}5^2 = 53{,}29$
Ainsi, on a l'égalité $BC^2 = AB^2 + AC^2$

D'après la réciproque de l'énoncé de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.



Dans le triangle RST, [ST] est le plus grand côté.

$ST^2 = 7^2 = 49$.
$RS^2+RT^2 = 4^2+6^2 = 52$
Ainsi, $ST^2 \neq RS^2 + RT^2$

D'après la contraposée du théorème de Pythagore le triangle RST n'est pas rectangle.